ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ МЯСНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

В.М. Горбатов, И.В. Губанов
Всесоюзный научно-исследовательский институт мясной промышленности, Москва, СССР

Ю.А. Ивашкин, Н.Н. Мизерецкий
Московский технологический институт мясной и молочной промышленности, Москва, СССР

Анализ состояния проблемы математического моделирования за период с 1930 по 1980гг. показывает существенное отставание мясной промышленности в этой области исследований от других отраслей.

Теория математического моделирования технологических подсистем отрасли представляется как система общих принципов построения и реализации математических моделей реальных объектов мясной промышленности. Особое значение в этих условиях приобретает имитационное моделирование технологических процессов.

Данное направление целесообразно применять для исследования процессов, в основе которых лежат микробиологические и биохимические явления, а также процессов, для которых пока еще не разработаны средства аппаратурного контроля за их состоянием (процессы созревания мяса, процессы приготовления фаршей при выработке колбасных изделий и т.п.).

Что касается процессов, физическая природа которых достаточно изучена (процессы термической обработки мясопродуктов, процессы разделения сред и т.п.), то для их исследования и оптимизации целесообразно применение методов аналитического моделирования, позволяющих создать стройный аппарат теории технологических процессов мясной промышленности.

В качестве примера рассмотрим построение типовой математической модели, наиболее характерной для различных технологических подсистем мясокомбината.

Учитывая, что любое интегральное преобразование уравнений связи относительно некоторой исследуемой величины (например: температуры или концентрации вещества на поверхности или в толще колбасных изделий и т.п.) по независимым переменным является с физической точки зрения ее усреднением по этим переменным, постулируем следующее утверждение: группа решающих систем общей теории технологических процессов и оборудования мясной промышленности инвариантна относительно категории преобразования соответствующих уравнений связи. Применение введенного нами постулата покажем на примере приближенного решения уравнения теплопроводности - диффузии Фурье-Фика. Для однородной безгранично протяженной пластины при отсутствии источников и распространении тепла или диффундирующего вещества в перпендикулярном к плоскости пластины направлении "x" оператор $\mathcal{D}^n$ имеет вид:

$$\mathcal{D}^n = O_0 = \frac{\partial}{\partial F} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

где - критерий Фурье или Фика.

Полагая, что является безразмерным решением уравнения Фурье-Фика для -го приближения, получим

$$\int_a^b \left(\frac{\partial y_n}{\partial F} - \frac{\partial^2 y_n}{\partial x^2}\right) y_n^m \, dx = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{1}{m+1} \cdot \frac{\partial}{\partial F} \int_a^b y_n^{m+1} dx - \int_a^b y_n^m \frac{\partial^2 y_n}{\partial x^2} dx = 0, \qquad (3)$$

Решение уравнения (3) будем искать при условии:

$$O_0(y_n) = 0, \qquad (4)$$

$$\Theta = \frac{z - z_1}{z_0 - z_1}, \qquad (5)$$

$$y_n = 1 - \Theta = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}, \qquad (6)$$

$$F = 0, \quad y_n = 0, \qquad (7)$$

$$y_n \Big|_{x=\Delta} = 0, \qquad (8)$$

$$\frac{1}{\Delta}\left[-\frac{\partial y_n}{\partial x} - B(1 - y_0)\right] = 0, \qquad (9)$$

$$\left.\frac{\partial^{(k)} y_n}{\partial x^{k}}\right|_{\substack{x=\Delta \\ x=1}}^{x=0} = 0 \quad , \tag{I0}$$

$$y_n = y_c\,(1-x)^n , \tag{II}$$

где $z; z_i; z_0$ – соответственно, зависимая переменная и ее частные значения;

B – критерий Био или Фика;

y_c – значение величины y на поверхности тела (при $x = 0$).

Разобьем промежуток $0 \le x \le L$ на два участка ($0 \le x \le \Delta$, $\Delta \le x \le L$). Формирование поля величины y_n (протекающее с конечной скоростью) на участке $0 \le x \le \Delta$, когда Δ становится равным L, заканчивается и становится стационарным (первый период). Это обстоятельство позволяет при преобразованиях уравнения (3) оставаться в рамках технической теории, что весьма существенно для разработки методов расчета процессов тепло- и массообмена в инженерной практике мясной промышленности.

Во втором периоде (при $F \ge F_1$) поле величины y_n уже не является стационарным и изменяется во времени. В этом случае в качестве начальных условий необходимо использовать решение уравнения (3), полученное для первого периода.

Для первого участка ($0 \le x \le \Delta$) в относительных переменных (x, y_n) уравнение (3) запишется в виде:

$$\frac{1}{m+1}\cdot\frac{\partial}{\partial F}\left[\Delta\int_0^1 y_n^{m+1}\,dx\right] = \frac{1}{\Delta}\int_0^1 y_n^{m}\,\frac{\partial^2 y_n}{\partial x^2}\,dx \tag{I2}$$

Выполняя в правой части (I2) интегрирование по частям и учитывая соотношения (8) и (II) будем иметь:

$$\frac{1}{m+1}\cdot\frac{\partial}{\partial F}\left[\Delta\cdot\frac{y_c^{m+1}}{[n\cdot(m+1)+1]}\right] = \frac{1}{\Delta}\left[n y_c^{m+1} - \int_0^1 n^2 m y_c^{m+1}(1-x)^{n(m+1)-2}\cdot dx\right] \tag{I3}$$

После несложных преобразований уравнение приводится к виду:

$$d\left(\Delta\, y_c^{\,m+1}\right)^2 = 2M y_c^{\,2(m+1)}\, dF \tag{I4}$$

где

$$M = \frac{(m+1)[n(m+1)+1]\,n(n-1)}{[n(m+1)-1]} \tag{I5}$$

Интегрируя уравнение (I4) с учетом (I5), окончательно получим

$$\Delta = \left[\frac{2M\int_0^F y_c^{\,2(m+1)}\,dF}{y_c^{\,2(m+1)}}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{I6}$$

Для определения величины y_c используем соотношения (9) и (II), что дает

$$\frac{n y_c}{\Delta} = B(1-y_c) \tag{I7}$$

В результате последовательного возведения левой и правой частей уравнения (I7) с учетом (I6) в квадрат, дифференцирования по F и интегрирования по y_c получим:

$$\frac{m}{1-y_c} + \ln(1-y_c)^{m+1} - \frac{(2m+1)}{2} + \frac{1}{2(1-y_c)^2} = \frac{M}{n^2}\cdot T^2 \tag{I8}$$

где: T – критерий Тихонова или Фика ($T = B\sqrt{F}$).

Существующие на IУ иерархическом уровне связи между любыми двумя подмножествами X и У из теории тепло- или массообмена в процессах и аппаратах мясной промышленности позволяют не рассматривать процедуру нахождения решения поставленной задачи для 2-го периода нагрева или охлаждения безграничной пластины, а также для безграничного цилиндра, шара и тел произвольной формы, т.к. в соответствии с категорией симметрии эти процедуры аналогичны.

Установим связь между полученными нами результатами (I)-(I8) и основными положениями аналитической теории процессов термической обработки мясопродуктов.

Используя обозначения ($y=\vartheta,\ B=B_i,\ \xi=x/L,\ \Delta=\rho$), будем предполагать, что согласно (8) решением уравнения (3) при условиях (4)-(I0) наряду с (II) является также выражение:

$$\vartheta=\frac{B_i\sum_{s=0}^{n}C_s(\xi-\rho)^s}{\sum_{s=0}^{n}C_s D_s} \qquad (19)$$

$$D_s=B_i(1-\rho)^s+s(1-\rho)^{s-1} \qquad (20)$$

Ограничиваясь случаем, когда все функции $C_s\ (0\le s\le n-1)$ равны нулю, получим:

$$\vartheta_n=\frac{B_i(\xi-\rho)^n}{D_n} \qquad (21)$$

$$D_n=B_i(1-\rho)^n+n(1-\rho)^{n-1} \qquad (22)$$

$$\varphi_n=\frac{B_i}{D_n} \qquad (23)$$

Подставив (2I) с учетом (22) и (23) в (3) и полагая $m=0,\ n=2,\ a=\rho,\ b=1,\ \tau=F_0$ будем иметь:

$$\frac{\partial}{\partial F_0}\int_\rho^1\vartheta_2\,d\xi=\int_\rho^1\frac{\partial^2\vartheta_2}{\partial\xi^2}\,d\xi \qquad (24)$$

$$\int_\rho^1\frac{2B_i}{D_2}\,d\xi=\frac{2B_i(1-\rho)}{D_2} \qquad (25)$$

$$\frac{1}{1-\rho}\int_\rho^1\frac{\partial\vartheta_2}{\partial F_0}\,d\xi=2\varphi_2 \qquad (26)$$

Этот факт дает основание утверждать, что с помощью принципа (I) и предложенного метода его применения (2)-(23) могут быть получены не только все остальные приближенные решения уравнения теплопроводности для условий процессов термической обработки мясопродуктов (варка, замораживание, обжарка, охлаждение, размораживание, сушка и т.п.), но и приближенные решения других уравнений связи из общей теории математического моделирования технологических процессов и оборудования мясной промышленности.