

Mathematische Grundlagen von Standardisierungsmodellen in der Fleischwirtschaft

GERT LORENZ  
 Institut für Betriebswirtschaft und Marktforschung der Lebensmittelverarbeitung,  
 Bundesanstalt für Milchwirtschaft, Kiel, Bundesrepublik Deutschland

1. Standardisierung in der Fleischwarenindustrie

Für Standardisierung von Wurstwaren, welche aus Gründen einer gleichbleibenden Qualität, sowie aus rechtlichen und ökonomischen Gründen notwendig erscheint, setzt die Praxis derzeit zwei Verfahren, das Preblending und die lineare Programmierung (LP) ein. Die mathematischen Grundprinzipien beider Methoden werden in dieser Arbeit erläutert; darüber hinaus werden beide Methoden so verfeinert, daß beim Preblending neben der bisher üblichen Einstellung des Fettgehaltes F (und/oder Eiweißgehaltes FE) nunmehr eine zusätzliche Einstellung des Bindegeweibseiweißgehaltes BE und bei der linearen Programmierung die zusätzliche Einbeziehung von lebensmittelrechtlichen Bedingungen für z.B. Fremdwasser und den Plasmaeinsatz möglich werden. Abschließend werden Vor- und Nachteile beider Systeme aufgezeigt.

2. Preblending - ein erweitertes Modell zur kombinierten Standardisierung von Fett F, bindegeweibseiweißfreiem Fleischeiweiß BEFFE und Bindegeweibseiweiß BE (F-, BEFFE- und BE-Standardisierung)

Beim Preblending (Vormischverfahren) wird Magerfleisch durch Wolfen oder Kuttern zu einem Magerbrät aufbereitet, hinsichtlich der einzustellenden Inhaltsstoffe analysiert und durch die Zugabe von Salz stabilisiert. In einem zweiten Verfahrensschritt wird diesem Magerbrät in einem Mischer dann fett- und bindegeweibhaltigeres Material und bei Brühwurst in bestimmten Mengen zugesetzt, um ein final blend (Fertigrät) mit definierten Mengen an Inhaltsstoffen, d.h. ein in seiner Qualität standardisiertes Endprodukt zu erhalten. Bei dieser generellen Verfahrensweise des Preblending war entsprechend den bisherigen schnellanalytischen Möglichkeiten nur die Einstellung des F- und/oder FE-Gehaltes üblich. Neuerdings kann jedoch auch BE in einer Schnellanalyse (z.B. System Super Scan) bestimmt werden, so daß in Abb. 1 ein Modell zur nunmehr möglichen kombinierten F-, BEFFE- und BE-Standardisierung vorgestellt wird.

Der rechen-technische Ablauf ist dabei so gestaltet, daß einem Rechner die Analysenwerte F, BEFFE (BEFFE = FE - BE) und BE der in diesem Modell berücksichtigten 4 Rohstoffe des final blend, die Qualitätsanforderungen herzustellender Endprodukte bezüglich dieser Inhaltsstoffe, sowie die herzustellenden Mengen einzugeben sind.

Aus diesen Eingabedaten wird ein Gleichungssystem mit quadratischer (hier: (4x4)-) Rohstoffmatrix erstellt und nach den für eine Standardisierung der Endprodukte notwendigen Rohstoffmischungsanteilen aufgelöst. Ein Beispiel für derartige Gleichungssysteme bei Herstellung z.B. fünf qualitativ unterschiedlicher Brühwurstsorten wird in Abb. 2 in Matrixschreibweise gegeben. Die Lösung des Gleichungssystems (Ermittlung der Rohstoffeinsatzmengen X) erfolgt entweder für jedes Endprodukt einzeln nach dem Gauß'schen Algorithmus, oder für alle Produkte mittels Matrixinversion der Rohstoffmatrix A (Ergebnis:  $A^{-1}$ ) und Multiplikation von  $A^{-1}$  mit der Matrix der Endprodukthanforderungen B entsprechend der Formel  $X = A^{-1} \cdot B$ .

(Micro-)Computerhersteller bieten Software zur Lösung derartiger Gleichungssysteme meist kostenlos innerhalb ihrer Standard-Software-Pakete an, so daß die Lösung leicht ermittelt werden kann. Für das Beispiel ergibt sie sich zu:

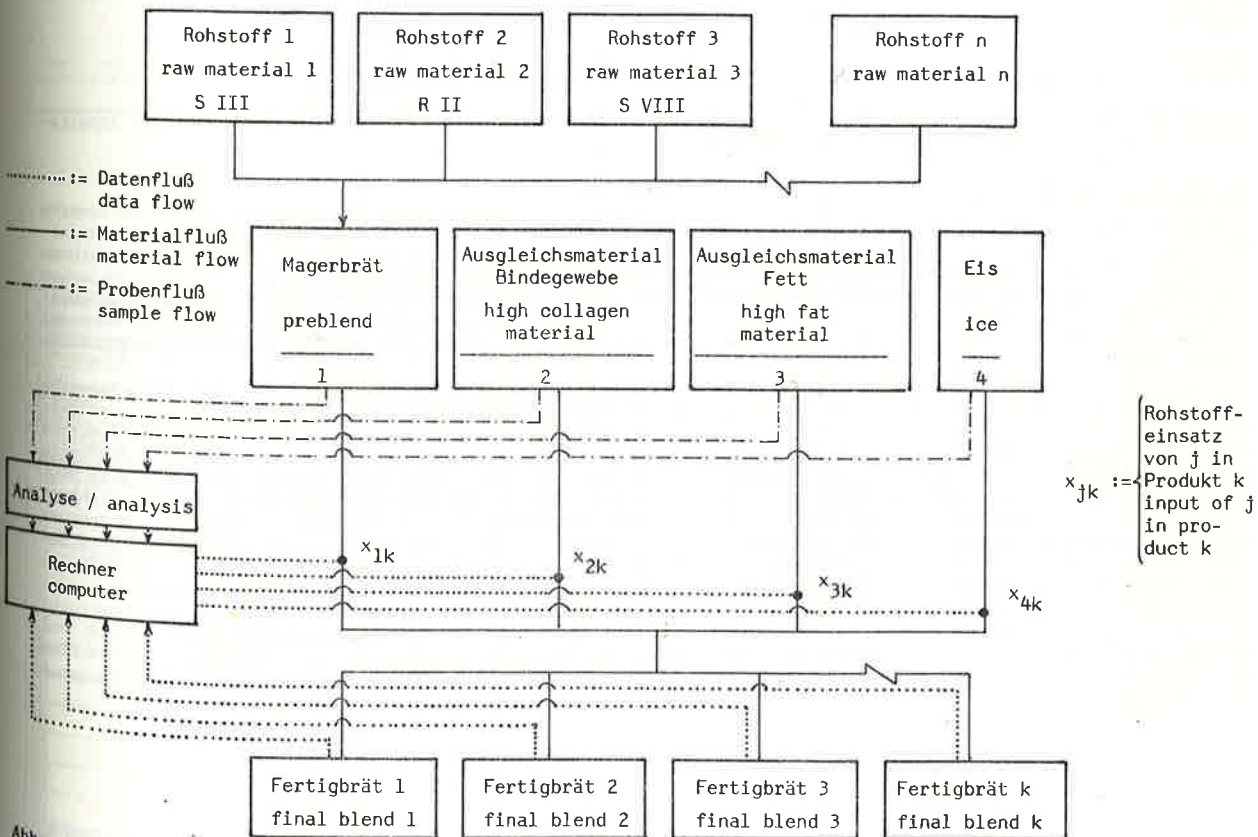


Abb. 1  
 pic. 1  
 Prinzipskizze der kombinierten Fett-, Befee- und Bindegeweibseiweißstandardisierung  
 Concept for a combined fat, muscle tissue protein and collagen protein standardization system

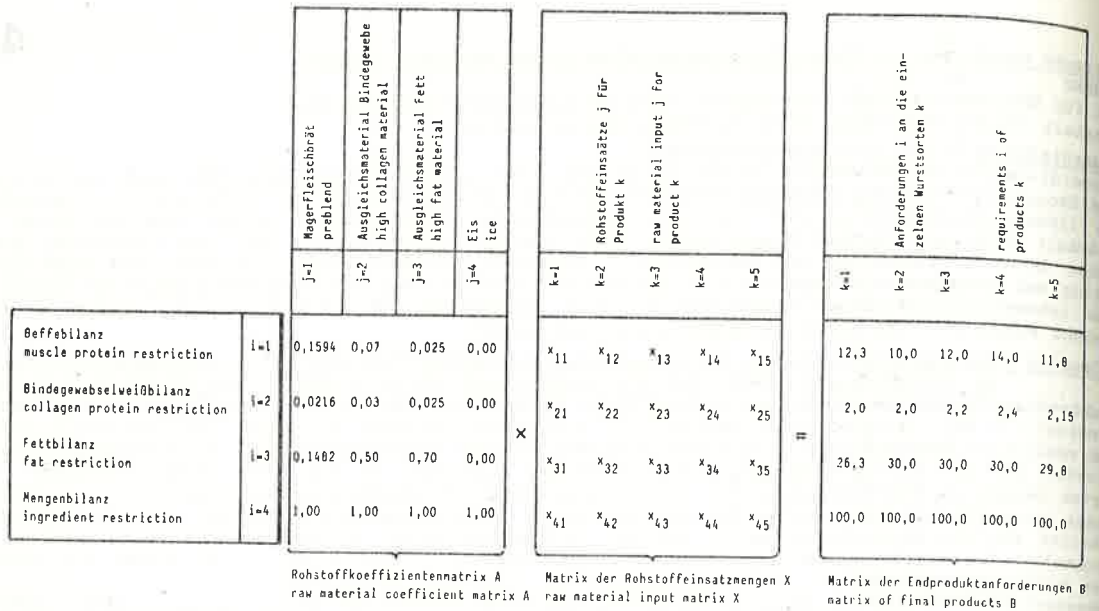


Abb. 2 Beispiel für die kombinierte Fett-, Beffe- und Bindegewebselweiß-Standardisierung  
pic. 2 example for a combined fat, muscle protein and collagen protein standardization

	PRODUKT 1	PRODUKT 2	PRODUKT 3	PRODUKT 4	PRODUKT 5
ROHSTOFF 1	57.15 685	34.97 971	46.17 322	57.36 673	46.66 294
INGREDIENT 1					
ROHSTOFF 2	10.59 466	29.49 489	30.93 326	32.37 162	26.74 619
INGREDIENT 2					
ROHSTOFF 3	17.90 190	14.38 366	10.98 643	7.58 920	13.58 780
INGREDIENT 3					
ROHSTOFF 4	14.34 560	21.14 174	11.90 709	2.67 245	13.00 308
INGREDIENT 4					

Mischt man die Rohstoffe für das final blend aufgrund dieser Angaben, so erhält man hinsichtlich der Inhaltsstoffe F, BEFFE und BE die gewünschten Qualitäten.

### 3. Einzelrezepturerstellung mittels linearer Programmierung (LP)

Während beim Preblending lediglich eine Standardisierung von Endprodukten hinsichtlich der Inhaltswerte angestrebt wird, kommt bei der linearen Programmierung LP ein weiteres Ziel, i.d.R. dasjenige der Kostenminimierung, hinzu. Die in einer Rezeptur einzusetzenden Rohstoffmengenanteile werden durch die LP-Methode so bestimmt, daß in der Endmischung die Einhaltung aller zu berücksichtigenden qualitativen, technologischen und lebensmittelrechtlichen Anforderungen gewährleistet ist und gleichzeitig die in bezug auf das Mischungsproblem absolut kostengünstigste Lösung gefunden wird. Die LP-Methode geht dabei prinzipiell so vor, daß zunächst die Lage der Rohstoffkosten- bzw. Zielfunktion (Abb. 3), sowie der Bereich zulässiger Rezepturlösungen (Abb. 4) bestimmt werden.

Dieser zulässige Bereich ergibt sich durch (Un-)Gleichungen, welche als Koeffizienten die Analysenwerte der einsetzbaren Rohstoffe, sowie die qualitativen, lebensmittelrechtlichen und technologischen Anforderungen an das Fertigbrät enthalten. Ist der durch diese Anforderungen und Analysenwerte der Rohstoffe definierte zulässige Bereich bestimmt, so wird auf diesem das Minimum der Kostenfunktion gesucht und bei eindeutig lösbar Problem in einer Ecke des zulässigen Bereichs gefunden. Diese Ecke stellt dann die gesuchte, kostenoptimale Rezepturlösung dar (Abb. 5). Im Gegensatz zu dem in den Abb. 3-5 enthaltenen Rezepturproblem, welches sich aus Darstellungsgründen auf lediglich zwei Rohstoffe bezieht, sind bei praktischen Rezepturproblemen jedoch meist eine Vielzahl von Rohstoffen einsetzbar, so daß eine Lösung nicht mehr auf graphischem Wege, sondern bei im Prinzip gleichartiger Vorgehensweise nur noch mittels EDV-Berechnung per LP erfolgen kann. Software zur Lösung von LP-Problemen ist heute bei praktisch allen renomierten EDV-Herstellern, insbesondere auch bereits für Microcomputer verfügbar. Es wird hier daher speziell nur auf die problemgerechte, für eine EDV-Berechnung mittels LP nunmehr einzig notwendige, exakte mathematische Formulierung von Rezepturproblemen eingegangen. Als Beispiel dazu diene die Berechnung einer aus neun verfügbaren Rohstoffen zu erstellenden Mortadella, deren Fertigbrät folgende qualitativen und lebensmittelrechtlichen Anforderungen erfüllen soll:

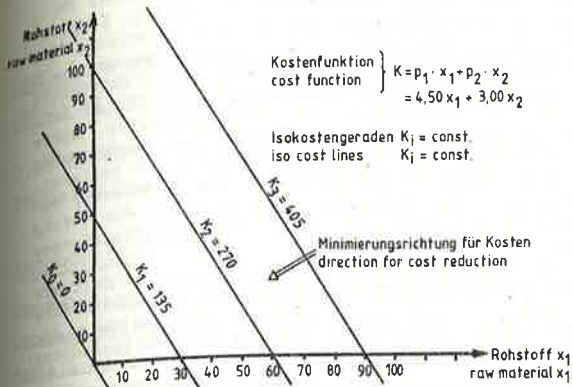


Abb 3 Rezepturkosten als Funktion des Rohstoffeinsatzes  
pic 3 formula cost as function of raw material input

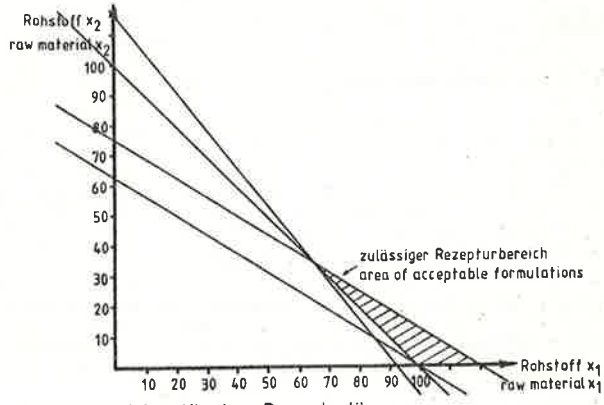


Abb 4 Bereich zulässiger Rezepturlösungen  
pic 4 area of acceptable formulations

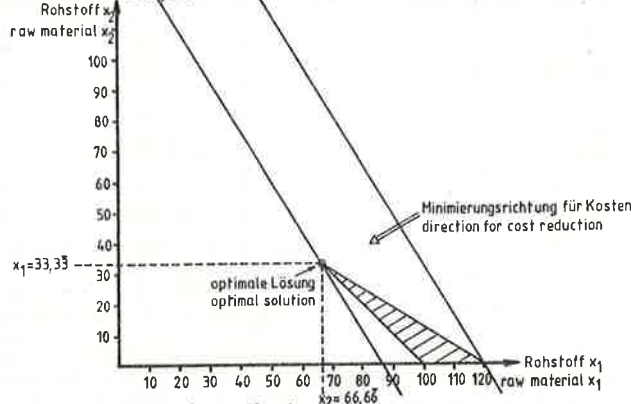


Abb 5 Ermittlung der optimalen Lösung  
pic 5 search for an optimal solution

Abb 6 Simplextableau  
pic 6 simplex table

	9 zulässige Rohstoffe admissible Ingredients (X1... X9)									rechnerische (Analyse-) Werte calculable (analysis) data								Rezepturmengentyp recipe amount type	rechte Seite / right hand side	Name / name	Typ / type
	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	BEFFE	BE	FE	F	W	FUF	FW					
1 bindegewebeisweiß freies Fleischweiß BEFFE	0,104	0,105	0,040	0,072	0,014	0,045	0,163	0	0	-1							0		R 1	E	
2 Bindegewebeisweiß BE	0,041	0,018	0,097	0	0,013	0,033	0,016	0	0		-1						0		R 2	K	
3 Fleischweiß FE	0,145	0,123	0,137	0,072	0,031	0,083	0,179	0	0			-1					0		R 3	E	
4 Fett F	0,400	0,400	0,238	0,001	0,893	0,666	0,150	0	0				-1				0		R 4	E	
5 Wasser W	0,455	0,477	0,625	0,927	0,086	0,231	0,671	1	1					-1			0		R 5	K	
6 Fett- u. Fleischmenge FUF	1	1	0	0	1	1	1	0	0						-1		0		R 6	E	
7 Fremdwasser FW												-4		1		-1	0		R 7	E	
8 BEFFE = a [%]										1							0,5		R 8	E	
9 BE = b [%] / 100 · FE = 0											1	-0,2					0,5		R 9	E	
10 FETT = c [%]													1				0,5		R 10	E	
11 PLASHA = d [%] / 100 · FUF = 0				1												-0,05	0,5		R 11	E	
12 Fremdwasser FW = e																	20		R 12	E	
13																	0		R 13	E	
14 X1 min	1																0		R 14	E	
15 X1 max		1															0		R 15	E	
16 X2 min			1														40		R 16	E	
17 X2 max				1													60		R 17	E	
18 X3 min					1												0		R 18	E	
19 X3 max						1											5		R 19	E	
20 X4 min							1										0		R 20	E	
21 X4 max								1									2		R 21	E	
22 X5 min									1								10		R 22	E	
23 X5 max																	2		R 23	E	
24 X6 min																	6		R 24	E	
25 X6 max																	0		R 25	E	
26 X7 min																	0		R 26	E	
27 X7 max																	35		R 27	E	
28 X8 min																	0		R 28	E	
29 X8 max																	100		R 29	E	
30 X9 min																	0		R 30	E	
31 X9 max																	1		R 31	E	
Rezepturmengentyp	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1							0		R 32	E	
Zielwertfunktion Z → MIN!	2,43	3,32	0,51	1,00	2,03	0,20	5,00	0,20	10,00										Ziel		

BEFFE  $\geq 8,5$  [%],  $F \leq 30$  [%],  $BE/FE \leq 0,2$ , Plasma/(Fett u. Fleisch FUF)  $\leq 0,02$ , sowie Fremdwasser FW  $\leq 20$  [%]. Dieses Rezepturerstellungsproblem ist in (Un-)Gleichungen formuliert in Abb. 6, dem sog. Simplex-tableau enthalten. In den Zeilen 1-6 dieses Simplex- bzw. Rezepturtableaus erfolgt die Berechnung der Größen BEFFE, BE, FE, F, Wasser W und der Fett- und Fleischmenge FUF aufgrund der in den Spalten 1...9 enthaltenen analytischen Werte der Rohstoffe  $x_1 \dots x_9$ . In Zeile 7 wird eine Berechnung des Fremdwassers als  $FW = 4 \cdot FE - W$ , entsprechend der lebensmittelrechtlichen Definition, vorgenommen. Die Zeilen 8-12 enthalten die Anforderungen, welche an das Produkt hinsichtlich des BEFFE-, F- und FW-Gehaltes, sowie bezüglich der Verhältnisse BE/FE und Plasma/FUF gestellt werden. Aus technologischen und sensorischen Gründen werden die Mindest- und Höchststeinsatzmengen der Rohstoffe  $x_1 \dots x_9$  in den Zeilen 13...30 begrenzt, so z.B. der Rohstoff S3 mit Sehnen,  $x_1$ , auf  $x_1 \leq 8$  [kg]. Die Zeilen 31 und 32 dienen der Berechnung der Rohstoff- bzw. Rezepturmengen, welche hier auf 100 kg Fertigbrät (ohne Schwunde) bezogen wird. Als letzte Zeile folgt schließlich die Kosten- bzw. Zielfunktion, welche bezüglich des durch die (Un-)Gleichungen 1-32 dargestellten, zulässigen Rezepturbereichs zu minimieren ist. Die Koeffizienten dieses Rezepturtableaus werden nun gemäß dem Eingabeformat der entsprechenden LP-Software in einen Rechner eingegeben, welcher dann (bei lösbaren, nicht degenerierten Problemen) die optimale Lösung berechnet. (Die Lösung des vorstehenden Rezepturproblems erfolgte auf einer Siemens 7.735 mittels der Siemens Software LP 5000.) Als optimale, d.h. kostengünstigste Lösung ergibt sich folgende Mortadellarezeptur:

Rezeptur formula	Bezeichnung identification	Kosten cost	rechnerische Inhaltswerte calculable analysis data
$x_1 = 8,00000$	kg S = mit Sehnen	à 2,43 DM/kg	$x_{11} = 8,50000$ % BEFFE
$x_2 = 43,96674$	kg S3	à 3,32 DM/kg	$x_{12} = 2,09230$ % BE
$x_3 = 5,00000$	kg Schwartenbrei	à 0,51 DM/kg	$x_{13} = 10,59230$ % FE
$x_4 = 1,49612$	kg Plasma	à 1,00 DM/kg	$x_{14} = 30,00000$ % F
$x_5 = 2,00000$	kg Speck 2	à 2,03 DM/kg	$x_{15} = 59,40770$ % W
$x_6 = 5,83937$	kg Rinderfett	à 0,20 DM/kg	$x_{16} = 74,80611$ % FUF
$x_7 = 15,00000$	kg R 3	à 5,00 DM/kg	$x_{17} = 17,03851$ % FW
$x_8 = 14,99777$	kg Eis	à 0,20 DM/kg	
$x_9 = 3,70000$	kg Gewürz, Salz	à 10,00 DM/kg	
$x_{32} = 100$	kg Mortadella	$\sum 289,68$ DM/100 kg minimale Rezepturkosten	

least cost formulation

Wird die Mortadella aufgrund dieser Rezeptur gefertigt, so werden sämtliche, in Abb. 6 gestellten qualitativen, technologischen und lebensmittelrechtlichen Anforderungen eingehalten und gleichzeitig geringstmögliche Rohstoffkosten erzielt. Interessant an der optimalen Lösung ist, daß in diesem speziellen Fall u.a. die

Bedingungen für BEFFE, F und das Plasma/FUF-Verhältnis begrenzend wirken, nicht aber z.B. die Fremdwasserbedingung FW. Aufgrund der Tatsache, daß Fremdwasser also nicht in jeder kostenminimalen Rezeptur an der Höchstgrenze liegt, kann auch nicht die Fett- und Fleischmenge als Basis für den meist lohnenden Plasmaein-satz kalkuliert werden, wodurch deutlich wird, daß die Erstellung von kostenminimalen Rezepturen von Hand in der Regel nicht möglich ist und daher ein Rechneinsatz notwendig wird. Allgemein wird die bei gleichen (Qualitäts-)Anforderungen an das Endprodukt mit der linearen Programmierung gegenüber manueller Rezepturberechnung mögliche Kostenreduzierung auf durchschnittlich ca. 5 % beziffert, so daß in der Bundesrepublik Deutschland einige innovative Betriebe diese Methode bereits erfolgreich einsetzen.

#### 4. Zusammenfassung und Bewertung der Methoden

Eine Standardisierung von Fleischwaren ist aus qualitativen, technologischen, lebensmittelrechtlichen, sowie ökonomischen Gründen wünschenswert. Zu dieser Standardisierung können derzeit Verfahren des Preblend- und der linearen Programmierung eingesetzt werden. Vorteil des Preblending ist, daß der Analysenaufwand dadurch, daß lediglich eine Analyse des Magerbrätes und der zwei fett- und bindegewebshaltigen Rohstoffe stattfindet, begrenzt wird. Die Nachteile solcher, ausschließlich auf Gleichungen basierender Preblend-Systeme sind jedoch, daß komplexe lebensmittelrechtliche Normen, z.B. die Plasma- oder die BE/FE-Bedingung nicht mehr adäquat in Form von Ungleichungen abbildbar sind und zusätzlich zum Zeitpunkt der Rohstoffzusammenstellung eine Berücksichtigung von Preisen nicht stattfindet.

Die Methode der linearen Programmierung vermeidet zwar diese letztgenannten methodischen Mängel eines auf Gleichungen basierenden Preblending, dafür ist jedoch für die LP-Berechnung einer Rezeptur auch eine größere Datenbasis bezüglich der Rohstoffanalysenwerte, bezüglich der Preise und der lebensmittelrechtlichen Normen notwendig. Auch wenn unter methodischen Gesichtspunkten der linearen Programmierung unbedingt der Vorzug zu geben ist, so ist jedoch in jedem Betrieb anhand der jeweils gegebenen Produktionsstruktur zu entscheiden, welcher der Methoden speziell unter dem letztlich entscheidenden Aspekt der Wirtschaftlichkeit (= Ertrag - Aufwand) der Vorzug zu geben ist.

#### Literaturverzeichnis

KRAMLICH, PEARSON, TAUBER: "Least-Cost formulation and preblending of sausage" in: Processed Meats, S. 153 ff.

AVI 1980

RUST, R.E.: Sausage and processed meats manufacturing, AMI 1977.

LORENZ, G.: Die Erstellung kostenminimaler Einzelrezepturen in der Fleischwarenindustrie mittels linearer Programmierung. Paper C 33, 27. Europäischer Fleischforscher Kongress, Wies 1981.

BRAUN, K.: Der Einsatz verschiedener Standardisierungssysteme in der Fleischwarenindustrie, Sonderdruck aus "Die Fleischerei", Heft 7, 8, 9, 1981.