7-6 Математическое моделирование процесса погружения конического индентора в вязко-пластичные среды

КОСОИ В.Д., КАРПЫЧЕВ В.А., ГОРБАТОВ А.В., КОЛТЫПИН Ю.В., ШИРИКОВ В.Ф.
Московский технологический институт мясной и молочной промышленности
ДАДУНАШВИЛИ А.А.
СКБ Проектприбор

Для повышения выходов и улучшения качества продукции необходимо контролировать состояние мясного сырья на всех стадиях технологической обработки. Одной из реологических характеристик, которая обладает наибольшей чувствительностью к изменению технологических и механических факторов, является предельное напряжение сдвига (в дальнейшем – ПНС). Наибольшее распространение получил метод измерения ПНС с помощью конического пластометра (пенетрометра) в связи со своей простотой и малыми затратами времени на измерения.

В настоящее время при расчете ПНС неразрушенной структуры вязкопластичных материалов используют зависимость, предложенную академиком П.А.Ребиндером

$$\Theta_0^{н} = k m_p h_0^{-2} \qquad (I)$$

где $\Theta_0^{н}$ – ПНС неразрушенной структуры, Па; $k$ – константа конуса, зависящая от угла его раствора $2\alpha$, Н/кг; $m_p$ – полезная масса прибора, кг; $h_0$ – глубина погружения конуса в продукт, м.

Для вычисления константы К используют несколько выражений, полученных теоретически или экспериментальным способом. Однако некоторые из них сложны и малопригодны для инженерных расчетов. Кроме того, как было показано ранее /I/, эти формулы не дают хорошего соответствия с экспериментальными результатами измерения ПНС другими методами и требуют эмпирических поправок. Так, в работе /I/ предлагается определять ПНС по формуле

$$\Theta_0^{н} = K_1 K K_2 m_p h_0 \qquad (2)$$

где $k$ – константа, вычисленная по методике Н.Н.Аграната и М.П. Воларовича /2/:

$$\frac{1}{k} = \pi \operatorname{tg}^2\alpha \{ 2\alpha - 2(\sin\alpha+1)^2 \ln[\sin\alpha/(\sin\alpha+1)] + 1 - \operatorname{ctg}(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{\alpha}{2}) ] \cdot$$
$$\cdot (2\sin\alpha+1)^2 \ln[2\sin\alpha/(2\sin\alpha+1)] + [\operatorname{ctg}(\pi/4+\alpha/2) - \operatorname{ctg}(\pi/4+\alpha)] \cdot$$
$$\cdot \operatorname{ctg}^2(\pi/4-\alpha) \ln[2/(\operatorname{ctg}\alpha+1)] + \operatorname{ctg}(\pi/4+\alpha/2) \cdot [\operatorname{ctg}(\pi/4-\alpha) - (2\sin\alpha+1)]\}$$

а $K_I$ и $K_2$ – эмпирические поправки:

$$K_1 = 1 + (4h \operatorname{tg}\alpha / D)^2 \quad (4) \qquad K_2 = 0.83\,(1.7 - \sin 2\alpha) \quad (5)$$

причем первая из них учитывает зависимость результатов измерения ПНС от размеров сосуда с вязко-пластичным сырьем (Д – диаметр сосуда). Формула (2) дает хорошее соответствие величины ПНС со значениями, вычисленными другими методами в диапазоне углов $2\alpha$ от $30^0$ до $90^0$, в то же время это выражение ввиду его сложности малопригодно для инженерных расчетов константы конуса (3).

В настоящей работе получено несложное выражение для расчета ПНС, исходя из особенностей движения тела конической формы в вязкопластичной среде и при условии минимума эмпирических поправок.

Пусть пространство $z \geqslant 0$ заполнено вязкопластичной средой. Конус веса P, размеры которого $R$ (рациус основания) и H (высота) известны, погружается в вязкопластичную среду (рис.I). Обозначим $h = h(\tau)$ глубину погружения конуса к моменту времени "$\tau$" ($h(\tau)$ – непрерывная монотонно-возрастающая функция).

Составим уравнение конической поверхности. Из рис.I следует, что

$$r = (R/H)(h-z) \quad (6) \text{ или } \quad z = h - (H/R)r \qquad r = \sqrt{x^2+y^2} \quad (7)$$

$z$ – глубина погружения участка конуса с рациусом "$r$"). Объем погруженной части конуса равен

$$V_n = \frac{1}{3}\pi \tilde{r}^2 h \quad (8)$$

где $\tilde{r} = (R/H)h$ – рациус круга в сечении конуса поверхностью среды и, следовательно,

$$V_n = [\pi (R^2/H^2) h^3]/3 \quad (9)$$

Если $\gamma$ – уцельный вес вязко-пластичной срецы (который мы приближенно полагаем постоянным за все время погружения конуса), то на конус действует сила Архимеда, равная:

$$P_A = \pi\gamma (R^2 h^2/H^2)/3 \quad (I0)$$

Пусть $\Theta$ – тормозящее усилие, приходящееся на единицу площади контакта конуса со средой, тогда сопротивление среды погружению конуса, т.е. сила бокового трения, действующая параллельно боковой поверхности конуса, равна:

$$P_T = F\Theta \quad (II)$$

где "$F$" – площадь соприкосновения конуса со средой, которая может быть легко найдена:

$$F = \pi (R/H) h \sqrt{R^2h^2/H^2 + h^2} \quad (I2)$$

Кроме того, следует учесть распределение пластических деформаций в некотором объеме вблизи конуса (силы вязкого трения). Указанную силу будем учитывать коэффициентом "$\mu$", введенным в выражение (II). Величина $\mu$, очевидно, должна зависеть от угла раствора конуса $2\alpha$ и значения $\varepsilon = D/d$ (отношение диаметра сосуда со средой к диаметру погруженной части конуса – см./I/). Аналитическое определение сложно, и в дальнейшем этот коэффициент будет найден эмпирически.

Вышесказанные соображения позволяют составить следующее уравнение движения (погружения) конуса в вязко-пластичной среде

$$(P/g)(d^2h/d\tau^2) = P - \tfrac{1}{3}\pi\gamma(R^2/H^2)h^3 - (\mu\pi R h^2/H)(\sqrt{R^2+H^2}/H)\,\Theta\cos\alpha \quad (I3)$$

где $g$ – ускорение силы тяжести, м/с$^2$.
Легко видеть, что $\operatorname{tg}\alpha = R/H$, и тогда $\cos\alpha = 1/\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = H/\sqrt{R^2+H^2}$. Следовательно,

$$(P/g)(d^2h/d\tau^2) = P - \tfrac{1}{3}\pi\gamma(R^2/H^2)h^3 - \mu\pi R\Theta h^2 H \quad (I4)$$

Введем следующие обозначения:

$$(\pi\gamma/3P)(R^2/H^2) = 4\varphi\,; \quad \mu\pi R\Theta/PH = 3\beta \quad (I5)$$

Тогда уравнению (I4) можно придать следующий вид:

$$d^2h/d\tau^2 = g(1 - 4\varphi h^3 - 3\beta h^2) \quad (I6)$$

Начальные условия для этого дифференциального уравнения второго порядка, если конус начинает погружение в среду из состояния покоя, следующие:

$$h(0) = 0\,; \quad (dh/d\tau)_{\tau=0} = 0 \quad (I7)$$

Для нахождения решения (I6) при условиях (I7) применим способ понижения порядка, приняв:

$$dh/d\tau = w$$

---

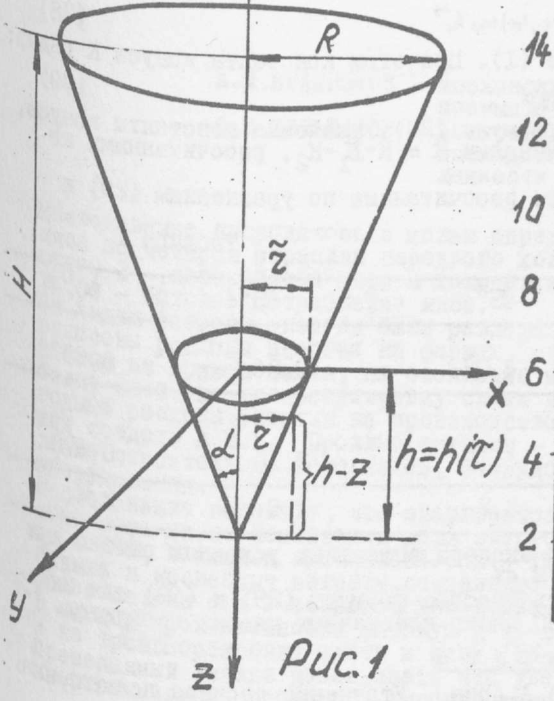


Рис.1

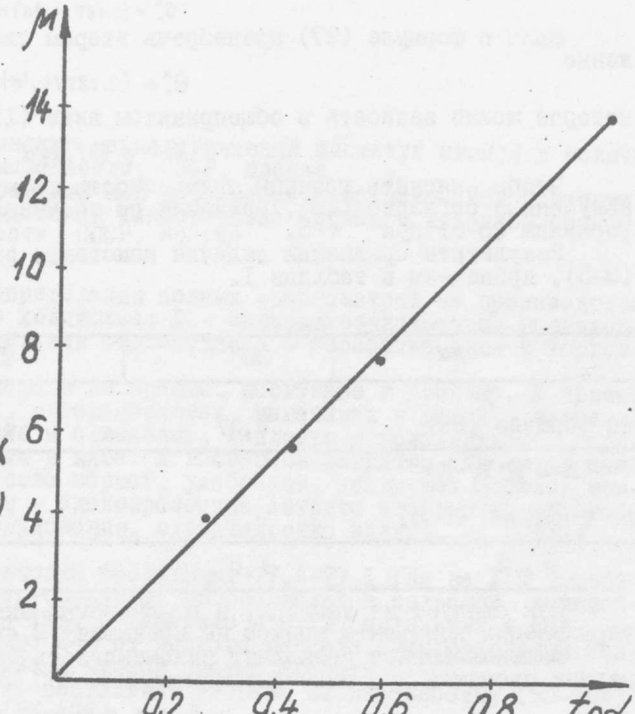


Рис.2

где $w$ – скорость погружения. Тогда $dw/dh = d^2h/d\tau^2$, и уравнение (I6) примет вид:

$$w\frac{dw}{dh} = g(1-4\varphi h^3-3\beta h^2) \qquad (I8)$$

а начальное условие соответственно:

$$w(0)=0 \qquad (I9)$$

Разделяя переменные в уравнении (I8) и интегрируя его, получим:

$$w^2 = 2g(h-\beta h^3-4h^4) \qquad (20)$$

так как согласно (I9) произвольная постоянная равна нулю.

Если при $h=h_o$ скорость $w=w_o$ (величины $h_o$ и $w_o$ могут быть замерены экспериментально), то из (20) получим

$$w_o^2/2g - h_o - \varphi h_o^4 = -\beta h_o^3 \qquad (2I)$$

Учитывая (I5), имеем

$$\mu\pi R\theta/3PH = [h_o-\alpha h_o^4-(w_o^2/2g)]/h_o^3$$

и, следовательно:

$$\Theta = [3PH/(2\mu g\pi R)][2g(h_o-\varphi h_o^4)-w_o^2]/h_o^3 \qquad (22)$$

По определению в момент остановки конуса (т.е. при $w_o=0$) $\theta=\theta_o^н$. Тогда, согласно (22)

$$\Theta_o^н = (3PH/\pi\mu R)(h_o^{-2}-\varphi h_o) \qquad (23)$$

и подставляя $\varphi$ из (I5) и учитывая, что $R/H = tg\alpha$, получим выражение для определения ПНС:

$$\Theta_o^н = (3g/\mu\pi tg\alpha)(m_p/h_o^2-\pi\gamma tg^2\alpha\, h_o/12g) \qquad (24)$$

В этом выражении величина "$\mu$" неизвестна. Для нахождения ее значений результаты расчетов по формуле (2) (которую считали эталонной) сравнивали со значениями, вычисленными по уравнению (24), при условии $\mu=I$. Сравнение проводилось для углов раствора конуса $2\alpha$, равных 30°, 45°, 60° и 90° при глубине его погружения в пределах от 0,0I до 0,04 м и .5, когда влиянием краевых эффектов можно пренебречь /I/.

Оказалось, что в пределах одного угла раствора конусов разной массы при различных глубинах погружения коэффициент "$\mu$" практически не меняется. В то время как его величина, как и ожидалось, зависит от значений $2\alpha$. На рис. 2 приведена зависимость $\mu = f(tg\alpha)$. Из рисунка следует, что с достаточной точностью выполняется условие:

$$\mu = I3,5\, tg\alpha. \qquad (25)$$

С учетом (23) выражение (24) примет виц

$$\theta_0^{н} = (0.22 g/\pi tg^2\alpha) m_p / h_0^2 - \pi \gamma tg^2\alpha \, h_0 / 12 g \quad (26)$$

Подставив затем в (26) значение $g$ и $\pi$, окончательно получим

$$\theta_0^{н} = (0.687/tg^2\alpha) m_p h_0^{-2} - 0.0185 \gamma h_0 \quad (27)$$

Если в формуле (27) пренебречь вторым слагаемым, то она превратится в выражение

$$\theta_0^{н} = (0.687/tg^2\alpha) m_p h_0^{-2} \quad (28)$$

которое можно записать в общепринятом виде (I). При этом константа конуса К равна:

$$K = 0.687/tg^2\alpha \quad (29)$$

Чтобы выяснить границы применимости формулы (28), значения константы конуса, полученные согласно (29), сравнили со значениями $K = K \cdot K_1 \cdot K_2$, рассчитанными по формулам (3-5) при $\varepsilon > 5$.

Результаты сравнения величин констант, рассчитанных по уравнениям (29) и (3-5), привецены в таблице I.

Таблица I

| $2\alpha$ | $30^0$ | $45^0$ | $60^0$ | $90^0$ |
|---|---|---|---|---|
| K по формуле (29) | 9,57 | 4,02 | 2,06 | 0,687 |
| $K = K \cdot K_1 \cdot K_2$ по формулам (3-5) | 9,40 | 4,10 | 2,10 | 0,670 |
| $\delta$, % | 1,8 | 2,2 | 1,9 | 2,4 |

Как слецует из таблицы, в описываемых экспериментальных условиях ошибка при опрецелении константы конуса не превышает 2,4%.

Вышеизложенное позволяет рекоменцовать простые формулы (29) и (30) для инженерных расчетов при массовых изменениях ПНС вязко-пластичных мясных продуктов.

Литература

I. В.Д.Косой, В.С.Катюхин, Ю.В.Колтыпин, А.А.Ариас. Уточнение расчета прецельного напряжения сцвига вязко-пластичных мясных продуктов. - Мясная инцустрия СССР, 1982, № 5, стр. 34-37.

2. Н.Н.Агранат, М.П.Воларович. О вычислении ПНС цисперсных систем в опытах с коническим пластометром. - Коллоицный журнал, 1957, т.19, № I.