

7 - 13 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ ПРОЦЕССОВ РЕЗАНИЯ МЯСОКОСТНОГО СЫРЬЯ.

В.И.Ивашов, Б.Н.Луиденко, В.А.Андреенков, А.М.Искандарян,

С.В.Славущев и А.Точек Московский технологический институт мясной
и молочной промышленности, Москва, СССР

В мясной промышленности в настоящее время многие процессы резания являются высокоскоростными — например, процессы рубки мясокостного сырья, куттерования фарша и т.д. а скорость резания в ряде случаев достигает ста метров в секунду. Эти высокоскоростные процессы имеют ярко выраженный динамический или импульсный характер. В данной работе рассматриваются некоторые процессы резания с позиций механики импульсного нагружения. Ставится задача исследовать внедрение клинообразных тел в материалы биологического происхождения с большой скоростью, т.к. такой процесс с нашей точки зрения может послужить основой для построения математической модели рубки. Для решения поставленной задачи рассмотрим движение клинообразного тела (ножа) массой m и обладающего начальной скоростью v_0 в биосреде, наделенной механическими свойствами мясокостного сырья и имеющей начальную плотность ρ_0 . Решение задачи удобнее производить в координатах XUZ (ось Z перпендикулярна к плоскости XOY), связанных с поверхностями клина (рис. I). Декартовы координаты $-ZWZ$. Связь этих систем координат выражается соотношением:

$$c \cdot (x - w) \cdot \operatorname{tg} \delta = (w - u) \cdot \operatorname{ctg} \delta \quad (1)$$

где δ — половина угла у вершины клина.

Метрические коэффициенты лице, полностью характеризующие ортогональную систему координат XUZ , для данной задачи имеют вид:

$$H_1 = \sin \delta; \quad H_2 = \cos \delta; \quad H_3 = 1 \quad (2)$$

При внедрении клина в разрезаемом материале образуются зоны возмущения, ограниченные свободной поверхностью разрезаемого тела, поверхностями внедряющегося клина и поверхностью, образуемой фронтом волны возмущения. Используем допущение о постоянстве плотности среды за волной возмущения, так как это предположение существенно облегчает математическую сторону задачи. Примем также гипотезу о том, что частицы среды движутся по прямолинейным траекториям, совпадающим с нормальными к поверхностям клина (гипотеза нормальных сечений). Исходя из этой гипотезы имеем:

$$V_x = V, \quad V_y = 0, \quad V_z = 0$$

где V_x, V_y, V_z - составляющие скорости частиц среды по координатным линиям;
 V - полная скорость частиц среды.
 Так известно, движение частиц среды описывается:

a) уравнением движения:

$$\operatorname{div}(G) + \rho \vec{F} = \rho \frac{d\vec{V}}{dt} \quad (3)$$

где $\frac{G}{F}$ - тензор напряжений;

б) уравнением неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = \rho \frac{dV}{dt} \quad (4)$$

в) начальными и граничными условиями.

Исходя из предположения о том, что в области возмущения $\rho = \text{const}$, уравнение неразрывности можно записать так:

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial V_x}{\partial t} = 0$$

Интегрируя (5) с учетом граничных условий (при $x=x_k, V=V_k = V_k \sin \delta$) получаем

$$V = V_k \cdot \sin \delta \quad (6)$$

где V_k - скорость клина в среде.

Уравнения движения среды (3) для рассматриваемой задачи после некоторых преобразований имеют вид:

$$H_2 \cdot H_3 \cdot \frac{\partial G_1}{\partial x} = \rho \cdot \frac{dV_x}{dt} \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \quad \frac{\partial G_1}{\partial x} = \rho \cdot \frac{dV_x}{dt} \cdot \sin \delta$$

$$H_3 \cdot H_1 \cdot \frac{\partial G_2}{\partial y} = 0$$

$$\text{или} \quad \frac{\partial G_2}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

$$H_1 \cdot H_2 \cdot \frac{\partial G_3}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial G_3}{\partial z} = 0$$

где G_1, G_2, G_3 - главные напряжения, причем направления действия G_1 и G_2 указаны на рис. I.

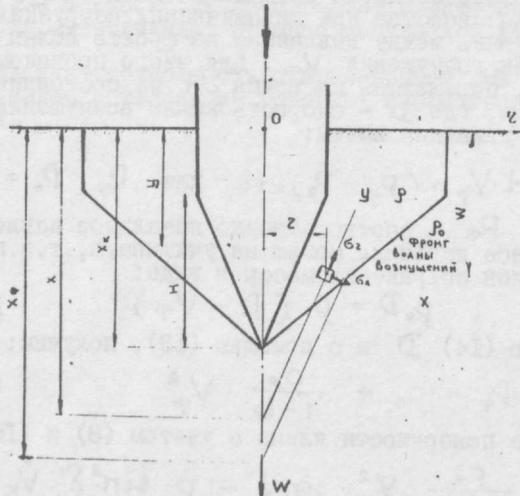


Рис. I. Внедрение клинообразного ножа в среду.

Обозначим через P_k давление на поверхности клина, через P_f - давление на фронте волны возмущений. Интегрируя первое из уравнений (7) с использованием граничных ус-

левый $P_1 = -P_k$ при $x = x_k$, $P_1 = -P_\varphi$ при $x = x_\varphi$, получим:

$$P_\varphi - P_k = \rho \cdot \sin^2 \delta \cdot V_k (x_k - x_\varphi) \quad (8)$$

Определим координату фронта волны, используя закон сохранения массы (рис.2). Прямоугольный элемент разрезаемой среды (заштрихован) определенной массы m' до внедрения клина имеет объем

$$V_0 = L \cdot d \cdot h \cdot (x_\varphi - y) \cdot \sin \delta \quad (9)$$

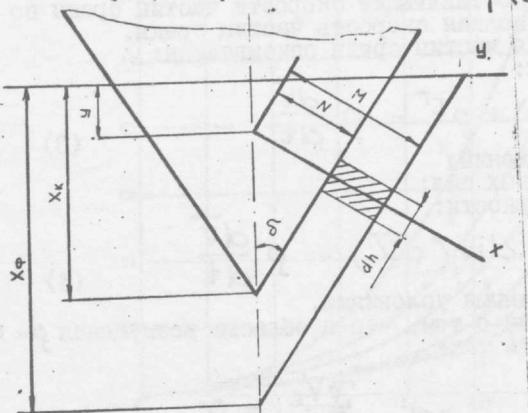


Рис.2. Определение координаты фронта волны.

После внедрения объем этого элемента среды будет равен:

$$V' = L \cdot d \cdot h \cdot [(x_\varphi - y) - (x_k - y)] \cdot \sin \delta \quad (10)$$

Масса рассматриваемого элемента среды определяется так:

$$m' = \rho_0 \cdot V'$$

$$\rho_0 \cdot L \cdot d \cdot h \cdot (x_\varphi - y) \cdot \sin \delta = \rho \cdot L \cdot d \cdot h \cdot [(x_\varphi - y) - (x_k - y)] \sin \delta \quad (II)$$

Из (II) находим координату фронта волны:

$$x_\varphi = \frac{b_y - x_k}{b - y} \quad (12)$$

$$\text{где } b = \frac{\rho_0}{\rho}$$

Величина b определяется по динамической кривой сжатия биоматериала и характеризует механические свойства при динамических нагрузках.

Установим связь между давлением на фронте волны возмущения и скоростью частиц на фронте волны возмущения V_φ . Для этого проведем следующие рассуждения.

Масса тела, перешедшего за время dt из состояния покоя в состояние движения будет $D \cdot \rho_0 \cdot dt$, где D - скорость волны возмущения. Тогда согласно закону сохранения количества движения имеем:

$$D \cdot \rho_0 \cdot dt \cdot V_\varphi = (P_\varphi - P_0) dt \quad \text{или} \quad P_\varphi - P_0 = D \cdot \rho_0 \cdot V \quad (13)$$

Здесь P_0 и P_φ - соответственно начальное давление и давление ударного сжатия среды. Начальное давление можно не учитывать, т.е. принять $P_0 = 0$.

Запишем закон сохранения массы в виде:

$$\rho_0 D = \rho \cdot (D - V_\varphi) \quad (14)$$

Исключаем в (14) D и с помощью (13), получим:

$$P_\varphi = \rho_0 + \frac{\rho_0}{1 - b} \cdot V_\varphi^2 \quad (15)$$

Давление на поверхности клина с учетом (8) и (15) будет

$$P_k = \frac{\rho_0}{1 - b} \cdot V_\varphi^2 \cdot \sin \delta - \rho \cdot \sin^2 \delta \cdot V_k \cdot (x_k - x_\varphi) \quad (16)$$

На основании (16) можно произвести расчет сил сопротивления среды, для чего введем обозначения: F_1 - вертикальная составляющая сил сопротивления среды движению клина, F_2 - вертикальная составляющая сил трения (считаем, что трение среды о поверхность клина подчиняется закону Кулона). Силы F_1 и F_2 выражаются через давление на поверхность клина следующим образом:

$$F_1 = 2 \cdot L \cdot t_0 \delta \int_{y_1}^{y_2} P_k dy$$

$$F_2 = 2 f L \int_{y_1}^{y_2} P_k dy \quad (17)$$

где L — длина клина;

f — коэффициент трения среды о материал клина.

Пределы интегрирования y_1 и y_2 в уравнениях (17) определяются так: $y_1 = x_k$, $y_2 = 0$.

при $x_k \leq H$ $y_1 = x_k$; $y_2 = x_k - H$ при $x_k > H$. Здесь H — высота клина.

Интегрируя (17) получим выражение для определения сил сопротивления F_1 и F_2 :

$$\text{при } x_k \leq H \quad F_1 = V_k^2 \left(2L \cdot \operatorname{tg} \delta \frac{\rho_0}{b-1} \sin^2 \delta \cdot x_k \right) + \dot{V}_k \left(L \cdot \operatorname{tg} \delta \frac{\rho_0}{b-1} \sin^2 \delta \cdot x_k^2 \right)$$

$$F_2 = V_k^2 \left(2\mu \cdot L \cdot \frac{\rho_0}{b-1} \sin^2 \delta \cdot x_k \right) + \dot{V}_k \left(\mu \cdot L \cdot \frac{\rho_0}{b-1} \sin^2 \delta \cdot x_k^2 \right) \quad (18)$$

$$\text{при } x_k > H \quad F_1 = V_k^2 \left(2L \cdot \operatorname{tg} \delta \frac{\rho_0}{b-1} \sin^2 \delta \cdot H \right) + \dot{V}_k \left(L \cdot \operatorname{tg} \delta \frac{\rho_0}{b-1} \sin^2 \delta \cdot H^2 \right)$$

$$F_2 = V_k^2 \left(2\mu \cdot L \cdot \frac{\rho_0}{b-1} \sin^2 \delta \cdot H \right) + \dot{V}_k \left(\mu \cdot L \cdot \frac{\rho_0}{b-1} \sin^2 \delta \cdot H^2 \right) \quad (19)$$

В соотношениях (18), (19) неизвестными остаются скорость и ускорение движения клинообразного тела в среде. Для их определения составим уравнение движения клина:

$$m \cdot \ddot{V}_k = F_1 + F_2 - m \cdot g \quad (20)$$

Подставляя $F_1 + F_2$ в уравнение (20) получим дифференциальное уравнение первого порядка нелинейное относительно скорости клина:

$$\begin{aligned} \dot{V}_k \cdot C_1 + V_k^2 \cdot C_2 + m \cdot g &= 0 \\ \text{где при } x_k \leq H \quad C_1 &= A \cdot x_k^2 + m \quad \text{и при } x_k > H \quad C_1 = AH^2 + m \\ C_2 &= 2A \cdot x_k \quad C_2 = 2AH \end{aligned} \quad (21)$$

$$A = \frac{\rho_0}{b-1} \cdot \sin^2 \delta \cdot L \cdot (\operatorname{tg} \delta + \mu)$$

Уравнение (21) решается с помощью подстановки $z = V_k^2$. В результате получим выражение для определения скорости и ускорения клина в процессе внедрения:

$$V_k = \frac{\sqrt{V_0^2 \cdot m^2 - \frac{2mgA \cdot x_k^3}{3} + 2m^2g \cdot x_k}}{A \cdot x_k^2 + m}$$

$$\dot{V}_k = \frac{-V \left\{ (mgA \cdot x_k^2 + mg)(A \cdot x_k^2 - m) + 2Ax_k \left[V_0^2 \cdot m^2 - \left(\frac{2mgA \cdot x_k^2}{3} + 2m^2g \cdot x_k \right) \right] \right\} V_k}{(A \cdot x_k^2 - m)^2 \cdot \sqrt{V_0^2 \cdot m^2 - \left(\frac{2mgA \cdot x_k^2}{3} + 2m^2g \cdot x_k \right)}} \quad (22)$$

$$V_k = e^{-\frac{C_2}{C_1} \cdot x_k} \sqrt{V_0^2 + \frac{4mgC_2}{C_1^2} \left(1 - e^{2 \frac{C_2}{C_1} \cdot x_k} \right)}; \quad \dot{V}_k = \frac{-\frac{C_2}{C_1} \cdot (V_0^2 + 4mg \cdot \frac{C_2}{C_1}) \cdot V_k}{e \cdot \frac{C_2}{C_1} \cdot x_k \sqrt{V_0^2 + 4mg \frac{C_2}{C_1} \left(1 - e^{2 \frac{C_2}{C_1} \cdot x_k} \right)}} \quad (23)$$

Уравнения (22) справедливы при $x_k \leq H$, а уравнения (23) — при $x_k > H$. В тех случаях, когда вес ножа мал по сравнению с силами сопротивления F_1 и F_2 , можно им пренебречь.

По уравнениям (18), (19) и (22), (23) можно произвести расчет кинематических, геометрических и силовых параметров, характеризующих процесс импульсной рубки мясокостного сырья.

Разработанная математическая модель дает возможность с применением ЭВМ решать комплекс инженерных задач, например, задач оптимизации основных параметров процесса с целью создания резательных машин.